Özdeğer Problemleri*

Dr. Barış Erkuş

1 Baz Vektörleri

Verilen bir $n \times 1$ boyutundaki sütün $\mathbf{a}$ vektörü, herhangi n adet $n \times 1$ boyutunda sütün baz vektörleri $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\mathbf{v}_n$ cinsinden ifade edilebilir:

$$\mathbf{a} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2, + \ \cdots \ + c_n\mathbf{v}_n, \qquad \mathbf{v}_i = \left\{ \begin{array}{c} v_i^1 \\ v_i^2 \\ \vdots \\ v_i^n \end{array} \right\}$$

Eğer c–katsayıları $n \times 1$ boyutunda bir $\mathbf{c}$–vektörüne, ve $\mathbf{v}$–vektörleri de $n \times n$ boyutunda bir $\mathbf{V}$ matrisine yerleştirilirse, a vektörü şu şekilde de ifade edilebilir:

$$\mathbf{c} = \left\{ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{array} \right\}, \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}\mathbf{c}$$

Bu durumda üç olasılıktan biri mümkün olabilir: (a) baz vektörlerinin genel olması, (b) baz vektörlerinin birbirlerine dik olması, (c) baz vektörlerinin birim büyüklükte olup biribirine dik olması. Bu üç durum aşağıda özetlenmiştir.

a. Seçilen $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\mathbf{v}_n$ baz vektörleri birbirine dik değilse, $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}$ işlemi ile elde edilen matris genel ancak simetrik bir matris olacaktır:

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet \\ \mathrm{SYM} & & & \bullet \end{bmatrix}$$

Bu durumda baz vektörlerinin büyüklüğü çok önemli değildir. Büyüklükleri birim ise, $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}$ diyagonalleri $(1)^2 = 1$ olacaktır.

b. Seçilen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ baz vektörleri birbirlerine dik ise, $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}$ işlemi ile elde edilen matris diyagonal matris olacaktır ve i–inci diyagonal $\mathbf{v}_i$–vektörünün büyüklüğünün karesi olacaktır; $|\mathbf{v}_i| = \sqrt{(v_i^1)^2 + (v_i^2)^2 + \cdots + (v_i^n)^2}$

*Positive Definite matrisler için

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} |\mathbf{v}_1|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\mathbf{v}_2|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\mathbf{v}_n|^2 \end{bmatrix}$$

Bunun nedeni bir birine dik olan vektörlerin skalar çarpımının sıfır olmasıdır.

c. Seçilen $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\mathbf{v}_n$ baz vektörlerinin büyüklükleri birim ise ve birbirlerine dik ise, $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}$ işlemi ile elde edilen matris diyagonal matris olacaktır ve i–inci diyagonal $(1)^2 = 1$ olacaktır: $|\mathbf{v}_i| = \sqrt{(v_i^1)^2 + (v_i^2)^2 + \cdots + (v_i^n)^2} = 1$.

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} (1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1)^2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Bu durumda $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V} = \mathbf{I} = \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}$ ve $\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{I}$ olduğundan, $\mathbf{V}^{\mathrm{T}} = \mathbf{V}^{-1}$ olacaktır.

2 Standart Özdeğer Problemi

Standart Özdeğer Problemi şu şekilde tanımlanabilir:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} = \lambda\boldsymbol{\phi}$$

Burada $\mathbf{A}$, $n \times n$ boyutlarında bir matris, $\boldsymbol{\phi}$, $n \times 1$ boyutunda özvektör ve λ özdeğerdir. Bu problemin çözümden n–adet özvektör ve bu vektörler ile eşleşen n–adet özdeğer elde edilir. Eğer bulunan bu özvektörler aşağıda gösterildiği gibi $n \times n$ boyutunda bir matris olarak ifade edilirse ve özdeğerler diyagonallere yerleşmiş bir matris olarak ifade edilirse

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\phi}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

özdeğer problemi şu şekilde teyit edilebilir:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}$$

Buradan aşağıdaki iki durumun sağlandığı görülebilir:

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Lambda}, \qquad \mathbf{A} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi}^{-1}$$

Bu noktada özdeğer vektörleri ve matrisi için $\mathbf{A}$ matrisine bağlı olarak iki olasılık mevcuttur: (a) $\mathbf{A}$ matrisinin simetrik olmaması durumu, (b) $\mathbf{A}$ matrisinin simetrik olması durumu. Bu iki durum aşağıda irdelenmiştir:

a. $\mathbf{A}$ matrisinin simetrik olmaması durumunda, özdeğer vektörleri birbirine dik olmayacaktır. Bu durumda 1.a.'de anlatıldığı üzere, $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}$ matrisi genel bir matristir ve diyagonal değildir. Özvektörlerin büyüklüğü birim ise, bu matrisin diyagonalleri $(1)^2 = 1$ olacaktır.

b. $\mathbf{A}$ matrisinin simetrik olması durumunda, özdeğer vektörleri birbirine dik olacaktır. Bu durumda 1.b.'de anlatıldığı üzere, $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}$ matrisi diyagonal matris olacaktır. Diyagonaller, özvektörlerin büyüklüğünün karelerine denk gelecektir:

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} |\boldsymbol{\phi}_1|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{\phi}_2|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\boldsymbol{\phi}_n|^2 \end{bmatrix}$$

Buna ek olarak, eğer öz vektörlerin büyüklükleri birim büyüklük haline getirilirse, yani $|\boldsymbol{\phi}_i| = 1$ yapılırsa, 1.c.'de anlatıldığı üzere

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} (1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1)^2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

olur. Görüldüğü üzere $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}$ matrisi $\mathbf{\Phi}^{-1}$ matrisi ile aynı vazifeyi görmüştür. Bundan dolayı öz vektörler birbirine dikse ve büyüklükleri birim büyüklük ise şu durumlar sağlanır:

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} = \mathbf{\Phi}^{-1}$$

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Lambda}, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}$$

3 Genelleştirilmiş Özdeğer Problemi

Genelleştirilmiş Özdeğer Problemi şu şekilde tanımlanabilir:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} = \lambda\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}$$

Burada $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri $n \times n$ boyutlarındadır, $\boldsymbol{\phi}$, $n \times 1$ boyutunda özvektör ve λ özdeğerdir. Bu problemin çözümden n–adet özvektör ve bu vektörler ile eşleşen n–adet özdeğer elde edilir. Eğer bulunan bu özvektörler aşağıda gösterildiği gibi $n \times n$ boyutunda bir matris olarak ifade edilirse ve özdeğerler diyagonallere yerleşmiş bir matris olarak ifade edilirse

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\phi}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

özdeğer problemi şu şekilde teyit edilebilir:

$$\mathbf{A}\mathbf{\Phi} = \mathbf{B}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}$$

Genelleştirilmiş Özdeğer Problemi, denklemin her iki tarafı $\mathbf{B}^{-1}$ ile çarpılırsa Standart Özdeğer Problemine çevrilebilir:

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A\Phi}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B\Phi\Lambda})$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A\Phi} = \mathbf{I\Phi\Lambda}$$

$$\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi\Lambda}, \qquad \text{(Standart Özdeğer Problemi)}$$

$$\text{burada:} \qquad \widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$$

Görüldüğü üzere, $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ işlemi Genelleştirilmiş Özdeğer Problemini standart probleme çevirmektedir. Bundan dolayı $\widetilde{\mathbf{A}}$ matrisinin simetrik olup olmaması büyük önem taşımaktadır.

Yapı dinamiğinde karşımıza çıkan problemlerin çoğunda $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri simetriktir. Buna rağmen $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ işlemi ile elde edilen $\widetilde{\mathbf{A}}$ matrisi çok özel durumlar dışında simetrik değildir. Bundan dolayı, 2.a. bölümünde anlatıldığı üzere, özvektörler birbirlerine dik değillerdir ve $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}$ genel bir matris olmaktadır.

$\widetilde{\mathbf{A}}$ matrisinin simetrik olmaması, özvektörlerin doğrudan dik olmaması anlamına gelmektedir. Ancak özvektörler, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri üzerinden bazı ek diklik özelliği gösterirler. Matematiksel olarak bu ek diklik durumları şu şekilde ifade edilir:

$$\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{\phi}_j = 0, \qquad \boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}_j = 0, \qquad i \neq j$$

Bu durumda $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A\Phi}$ ve $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{B\Phi}$ matrisleri diyagonal matrislerdir:

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A\Phi} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{B\Phi} = \begin{bmatrix} s_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_n^2 \end{bmatrix}$$

Özel bir durum olmadığı sürece r ve s büyüklükleri genel sayılardır. Birbirleri arasında ise $r_i = s_i^2\lambda_i$ bağlantısı mevcuttur. Bundan dolayı özvektörler, büyüklükleri $s_{i,\mathrm{yeni}} = 1$ olacak şekilde yenilenirse, şu sonuçlar ortaya çıkar:

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{yeni}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A\Phi}_{\mathrm{yeni}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}, \qquad \mathbf{\Phi}_{\mathrm{yeni}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B\Phi}_{\mathrm{yeni}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Büyüklüğü $\boldsymbol{\phi}_{i,\mathrm{yeni}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}_{i,\mathrm{yeni}} = 1$ olan özvektörler şu şekilde elde edilebilir:

$$\boldsymbol{\phi}_{i,\mathrm{yeni}} = \frac{1}{s_i}\boldsymbol{\phi}_i$$

Burada dikkat edilmesi gereken husus $\boldsymbol{\phi}_{i,\mathrm{yeni}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}_{i,\mathrm{yeni}} = 1$ büyüklüğünü sağlayan özvektörler, birim büyüklükte olmazlar. Yani $\boldsymbol{\phi}_{i,\mathrm{yeni}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}_{i,\mathrm{yeni}} \neq 1$.

4 Baz Vektörlerin Normalleştirilmesi

Görüldüğü üzere, baz vektörleri için önemli olan onların yönleridir. Büyüklükleri yönleri aynı kaldığı sürece değiştirilebilir. Bu ise, vektörün tüm elemanlarını aynı sayı ile çarparak ya da bölerek mümkün olabilir.

Hesaplarda, herhangi bir büyüklük kullanmak yerine, aşağıda özetlenen üç tip büyüklük faydalı olmaktadır ve denklemleri basit hale getirmektedir.

a. Bu seçenekte baz vektörlerinin gerçek büyüklüğü 1'dir: $\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi} = 1$. Bu tip bir büyüklük, $\mathbf{A}$ matrisinin simetrik olduğu Standart Özdeğer Problemlerinde faydalı olmaktadır, çünkü özvektörlerinin (baz vektörleri) gerçek büyüklükleri 1 olarak seçilirse simetrik bir $\mathbf{A}$ matris için $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}$ sağlanmaktadır.

b. Bu seçenekte baz vektörlerin verilen simetrik bir $\mathbf{B}$ matrisi üzerinden büyüklüğü 1'dir: $\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{\phi} = 1$. Bu tip bir büyüklük, simetrik $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinin içeren Genelleştirilmiş Özdeğer Problemlerinde faydalı olmaktadır, çünkü özvektörlerinin (baz vektörleri) gerçek büyüklükleri 1 olarak seçilirse $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}$ sağlanmaktadır. Bu durumda $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Lambda}$ olmaktadır.

c. Bu seçenekte baz vektörleri, vektör elemanlarının en büyük olanının 1 olarak düzenlenmesi ile elde edilir: $\max(\boldsymbol{\phi}) = 1$. Bu tip bir normalleştirme herhangi bir özdeğer probleminin çözümüne bir katkı sağlamayacaktır. Bu tip normalleştirmenin bazı özel kullanım alanları vardır. Bunlar daha sonraki bölümlerde tartışılacaktır.